RAZMATRANJA O JEDNOJ VRSTI REDOVA

Babić Ladislav
V.Nazora 2, 40000 Čakovec
Hrvatska

Promatrajmo red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m x^n \qquad x \in R^+ \tag{1}$$

i općenitiji red oblika:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (an^m + b)x^{sn+r} \qquad \begin{array}{l} n,m \in N \\ a,b,s,r \in R \\ x \in R^+ \end{array} \tag{2}$$

Označimo k-tu parcijalnu sumu reda (1) sa:

$$S_k^m(x) = \sum_{n=1}^{k} n^m x^n \tag{3}$$

<u>Rekurentna relacija za parcijalne sume</u>

Kratkoće radi, označimo $S_k^m(x) = S_k^m$

$$S_k^m = \sum_{n=1}^{k} n^m x^n \quad / \cdot x$$

$$x\, S_k^m = \sum_{n=1}^{k} n^m x^{n+1}$$

$$x\, S_k^m = \sum_{n=1}^{k} (n+1)^m x^{n+1} - x \cdot \sum_{n=1}^{k} \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} n^l x^n \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} (n+1)^m x^{n+1} - x \cdot \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \left\{ \sum_{n=1}^{k} n^l x^n \right\} \tag{4}$$

Ovdje smo koristili razvoj binoma $(n+1)^m$ po binomnoj formuli.

Označimo li

$$S_k^l(x) = S_k^l = \sum_{n=1}^{k} n^l x^n \qquad (5)$$

tada relacija (4) postaje:

$$x\, S_l^m = \sum_{n=1}^{k} (n+1)^m x^{n+1} - x \cdot \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S_k^l =$$

$$= \sum_{n=1}^{k+1} n^m x^n - x - x \cdot \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S_k^l = S_{k+1}^m - \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S_k^l \right\}$$

Prema tome dobija se:

$$S_{k+1}^m = \left\{ 1 + S_k^m + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S_k^l \right\} \cdot x \qquad (6)$$

odnosno, smjenom $k \to k-1$:

$$S_k^m = \left\{ 1 + S_{k-1}^m + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S_{k-1}^l \right\} \cdot x \qquad (7)$$

Kako iz relacije (1) izlazi:

$$S_{k-1}^m = S_k^m - k^m x^k \qquad (8)$$

to se supstitucijom (8) u (7) dobiva, nakon sređivanja:

$$S_k^m(x) = \frac{x}{1-x} \cdot \left\{ 1 - k^m x^k + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S_{k-1}^l(x) \right\} \qquad m \geq 1 \qquad (9)$$

Ova rekurentna relacija izražava k-tu parcijalnu sumu reda (1) pomoću k-1 prvih parcijalnih suma svih redova istog tipa (1), s potencijama od n manjima od m (tj. $n = 1,2,3,\ldots\ldots m-1$). Za $m = 0$ (smatramo li formalno sumu u zagradi jednaku nuli) dobijamo:

$$S_k^0(x) = x \cdot \frac{1 - x^k}{1 - x} \qquad (10)$$

poznati izraz za k-tu parcijalnu sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{n=1}^{k} x^{n} \tag{11}$$

Uzastopnim primjenama relacije (9) možemo izračunati parcijalne sume bilo kojeg reda tipa (1), s tim što je postupak za velike vrijednosti m-a dug i nepraktičan. Ilustrirajmo to za neke redove sa malim m-om.

1. primjer (m = 1)

$$S_k^1(x) = \sum_{n=1}^{k} n\, x^{n} \tag{12}$$

Prema (9) važi:

$$S_k^1 = \frac{x}{1-x} \cdot \left\{ 1 - k\, x^{k} + \binom{1}{0} S_{k-1}^{0} \right\} \tag{13}$$

Uzevši u obzir (10) i vodeći računa da nam treba k-1 parcijalna suma, dobiva se nakon sređivanja:

$$S_k^1 = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \left\{ k\, x^{k}(x-1) + (1-x^{k}) \right\} \tag{14}$$

2. primjer (m = 2)

$$S_k^2(x) = \sum_{n=1}^{k} n^2 x^{n} \tag{15}$$

$$S_k^2 = \frac{x}{1-x} \cdot \left\{ 1 - k^2 x^{k} + \binom{2}{0} S_{k-1}^{0} + \binom{2}{1} S_{k-1}^{1} \right\} \tag{16}$$

Primjećujemo da je za računanje parcijalne sume ovog reda potrebno poznavati i (10) i (14), pa se vidi koliko ovaj postupak može biti nezgodan za velike m-ove.

Za općeniti red oblika (2), rekurentna formula za k-tu parcijalnu sumu glasi:

$$S_k^m(x) = \frac{x^{s+r}}{1-x^s}\cdot\left\{ a\left[1 - k^m x^{sk} + \sum_{l=0}^{m-1} S_{k-1}^{l}(x)\right] + b\,(1-x^{sk})\right\} \qquad (17)$$

<u>Pitanje konvergencije redova (1) i (2)</u>

Red (1) je konvergentan za $x<1$. Dokazat ćemo to primjenom D'Alambert-ovog kriterija.

Opći član reda (1) glasi:

$$u_n = n^m x^n \qquad (18)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^m x^{n+1}}{n^m x^n} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^m \cdot x = x\cdot\lim_{n\to\infty} \left[1+ \frac{1}{n}\right]^m$$

Kako je poslijednji limes jednak jedan, to izlazi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x \qquad (19)$$

Prema D'Alambert-ovom kriteriju, da bi red bio konvergentan mora biti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x < 1$$

Time je dokaz gotov.

Za red (2) tvrdimo da je konvergentan ako je $x^s<1$ (tj. ako je simultano $x>1$ i $s<0$, odnosno $x<1$ i $s>0$). Zaista k-ta parcijalna suma reda (2) može se pisati:

$$S_k^m(x) = \sum_{n=1}^{k} (an^m + b)x^{sn+r} = ax^r\cdot\sum_{n=1}^{k} n^m x^{sn} + bx^r\cdot\sum_{n=1}^{k} x^{sn} \qquad (20)$$

Stavljajući $x^s=y$ svodimo prvu sumu na sumu tipa (3), dok druga suma s desne strane gornjeg izraza potiče od geometrijskog reda s kvocijentom y. Kako znamo da oba reda konvergiraju za $y<1$, to će limes niza parcijalnih suma reda (2) biti konačan za $x^s<1$.

Ograničili smo se na $x \in R^+$, jer bi za negativan x i razlomljeni s, dobili redove sa kompleksnim članovima.

Rekurentne relacije za sume konvergentnih redova tipa (1) i (2)

Promatrajmo parcijalne sume oblika (9) za red tipa (1),uz ograničenje da je $x<1$.Pod tim uvjetima je red (1) konvergentan,a njegova suma je jednaka limesu niza parcijalnih suma.

$$S^{m}_{\infty}(x) = \lim_{k\to\infty} S^{m}_{k}(x) \tag{21}$$

$$S^{m}_{\infty}(x) = \lim_{k\to\infty} \left\{ 1 - k^{m}x^{k} + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S^{l}_{k-1}(x) \right\}$$

Kako je:

$$\lim_{k\to\infty} k^{m}x^{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{m}}{\frac{1}{x^{k}}}$$

Uzastopnom primjenom L'Hospital-ova pravila na ovaj limes (m+1 puta) pokazuje se da je on jednak nuli.

$$\lim_{k\to\infty} k^{m}x^{k} = 0 \tag{22}$$

Prema tome važi slijedeća rekurentna relacija za sumu konvergentnog reda (1):

$$S^{m}_{\infty}(x) = \frac{x}{1-x} \cdot \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} S^{l}_{\infty}(x) \right\} \tag{23}$$

Ovdje smo sa $S^{l}_{\infty}(x)$ označili limes sume (5) za $k \to \infty$.
Za $m = 0$ dobijamo:

$$S^{0}_{\infty}(x) = \frac{x}{1-x} \tag{24}$$

poznati izraz za sumu konvergentnog geometrijskog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n} \qquad x<1 \tag{25}$$

Uzastopnom primjenom relacije (23) (kao što smo radili kod parcijalnih suma),dolazimo do suma proizvoljnih konvergentnih redova tipa (1). Evo nekoliko primjera:

1. primjer (m = 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} \qquad x<1 \tag{26}$$

$$S_{\infty}^{1}(x) = \frac{x}{(1-x)^{2}} \tag{27}$$

2. primjer (m = 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2} x^{n} \qquad x<1 \tag{28}$$

$$S_{\infty}^{2}(x) = \frac{x+x^{2}}{(1-x)^{3}} \tag{29}$$

3. primjer (m = 3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{3} x^{n} \qquad x<1 \tag{30}$$

$$S_{\infty}^{3}(x) = \frac{x + 4x^{2} + x^{3}}{(1-x)^{4}} \tag{31}$$

4. primjer (m = 4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{4} x^{n} \qquad x<1 \tag{32}$$

$$S_{\infty}^{4}(x) = \frac{x + 11x^{2} + 11x^{3} + x^{4}}{(1-x)^{5}} \tag{33}$$

5. primjer (m = 5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{5} x^{n} \qquad x<1 \tag{34}$$

$$S_{\infty}^{5}(x) = \frac{x + 26x^{2} + 66x^{3} + 26x^{4} + x^{5}}{(1-x)^{6}} \tag{35}$$

6. primjer (m = 6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{6} x^{n} \qquad x<1 \tag{36}$$

$$S_{\infty}^{6}(x) = \frac{x + 57x^2 + 302x^3 + 302x^4 + 57x^5 + x^6}{(1-x)^7} \qquad (37)$$

Jednako kao postupak određivanja parcijalnih suma i ovaj način određivanja suma konvergentnih redova je nezgodan. Zato ćemo se upoznati sa općim, pogodnim načinom nalaženja suma konvergentnih redova (1) i (2). Za sada, obratimo samo pažnju na koeficijente polinoma koji se javljaju u brojniku prethodnih formula.
Određujući limes niza parcijalnih suma oblika (17), uz uvjet $x^s<1$, dolazimo do formule i za sumu konvergentnog reda (2):

$$S_{\infty}^{m}(x) = \frac{x^{s+r}}{1-x^s} \cdot \left\{ a + b + \sum_{l=0}^{m-1} a \cdot \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix} S_{\infty}^{l}(x) \right\} \qquad (38)$$

<u>Opća metoda određivanja suma konvergentnih redova (1) i (2)</u>

Promatrajmo konvergentan red tipa (1):

$$S_{\infty}^{m}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^n \qquad x<1 \qquad (1)$$

te funkciju:

$$f(x) = (1-x)^{m+1} \qquad x<1 \qquad (39)$$

Pokušajmo prikazati produkt sume ovog reda i funkcije $f(x)$ u obliku polinoma m-tog stupnja po x:

$$S_{\infty}^{m}(x)\ (1-x)^{m+1} = \sum_{l=0}^{m} C_l^m\, x^l \qquad (40)$$

Desna strana predstavlja polinom m-tog stupnja po x:

$$P_m(x) = \sum_{l=0}^{m} C_l^m\, x^l = C_0^m + C_1^m\, x + C_2^m\, x^2 + \ldots\ldots + C_m^m\, x^m \qquad (41)$$

Koeficijente polinoma nađemo ako odredimo derivacije polinoma za $x = 0$ do uključivo m-te.

$$P'_m(x) = C_1^m + 2C_2^m x + 3C_3^m x^2 + \ldots\ldots + mC_m^m x^{m-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_m^{(m)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 2\cdot 1\cdot C_m^m$$

Za $x = 0$ izlazi:

$$P'_m(0) = 1!C_1^m$$

$$P''_m(0) = 2!C_2^m$$

$$P'''_m(0) = 3!C_3^m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_m^{(m)}(0) = m!C_m^m$$

Dakle, za proizvoljnu derivaciju $l \leq m$ vrijedi općenito:

$$P_m^{(l)}(0) = l!C_l^m \tag{42}$$

odnosno:

$$C_l^m = \frac{P_m^{(l)}(0)}{l!} \tag{43}$$

Time smo proizvoljni koeficijent u razvoju (40) izrazili pomoću odgovarajuće derivacije polinoma u $x = 0$.
Derivirajmo sada lijevu stranu izraza (40) l puta. Prema formuli za l-tu derivaciju produkta, pišemo:

$$\frac{d^l}{dx^l} P_m(x) = \frac{d^l}{dx^l}\left\{S_\infty^m(x)\,(1-x)^{m+1}\right\} = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\frac{d^k}{dx^k}\,S_\infty^m(x)\,\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}\,(1-x)^{m+1}$$

S obzirom da (1) predstavlja konvergentni red smijemo ga derivirati član po član.

$$\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(1-x)^{m+1} = (-1)^{l-k}(m+1)m\ldots[m+1-(l-k-1)](1-x)^{m+1+k-l} \tag{44}$$

(45)

$$\frac{d^k}{dx^k} S_\infty^m(x) = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) n^m x^{n-k}$$

Za x = 0 derivacije (44) i (45) glase:

$$\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}} \left\{ (1-x)^{m+1} \right\}_{x=0} = (-1)^{l-k} (m+1)m\ldots[m+1-(l-k-1)] =$$

$$= \frac{(-1)^{l-k} (m+1)m\ldots[m+1-(l-k-1)]\cdot\{m+1-[(l-k-1)+1]\}\ldots 2\cdot 1}{\{m+1-[(l-k-1)+1]\}\cdot\{m+1-[(l-k-1)+2]\}\ldots 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{(-1)^{l-k}(m+1)!}{[m+1-(l-k)]!} = (-1)^{l-k} \frac{(m+1)!(l-k)!}{[m+1-(l-k)]!(l-k)!} = (-1)^{l-k} \begin{pmatrix} m+1 \\ l-k \end{pmatrix} (l-k)!$$

Dalje je:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^n \right\}_{x=0} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-k+1)k^m = k(k-1)\ldots 2\cdot 1\cdot k^m =$$

jer ostaju samo članovi za n = k:

$$= k!k^m$$

Tako vrijedi dakle:

$$\frac{d^l}{dx^l} \left\{ P_m(x) \right\}_{x=0} = P_m^{(l)}(0) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k} k^m k!(l-k)! \begin{pmatrix} m+1 \\ l-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \qquad (46)$$

Uvrstimo li ovo u (40) dobiju se koeficijenti C_l^m :

$$C_l^m = \frac{\sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k} k^m k!(l-k)! \begin{pmatrix} m+1 \\ l-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}}{l!} \qquad (47)$$

Pišemo li (47) na ovakav način:

$$C_l^m = \frac{\sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\, k \begin{bmatrix} m+1 \\ l-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}}{\dfrac{l!}{k!(l-k)!}} = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \begin{bmatrix} m+1 \\ l-k \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}}$$

dolazimo do kondenziranog izraza za određivanje koeficijenata u razvoju (40):

$$C_l^m = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \begin{bmatrix} m+1 \\ l-k \end{bmatrix} \qquad l=0,1,\ldots m \qquad (48)$$

Dakle, važi:

$$S_\infty^m(x) \cdot (1-x)^{m+1} = \sum_{l=0}^{m} C_l^m\, x^l \qquad (40)$$

a suma reda (1) može se prema tome izraziti ovako:

$$S_\infty^m(x) = \frac{\sum_{l=0}^{m} C_l^m\, x^l}{(1-x)^{m+1}} \qquad (49)$$

Polinom u brojniku ima u stvari m članova jer je $C_0^m = 0$ (vidi se iz (52)) . Stoga sumaciju u (49) smijemo vršiti od 1 do m, tj. pisati:

$$S_\infty^m(x) = \frac{\sum_{l=1}^{m} C_l^m\, x^l}{(1-x)^{m+1}} \qquad (50)$$

Naravno da su oba zapisa ravnopravna. Mi ćemo nadalje koristiti oblik (50) te tome prilagoditi definiciju koeficijenata.

Općeniti red tipa (2) imat će sumu:

$$S^m_\infty(x) = \frac{a\cdot\sum\limits_{l=1}^{m} C^m_l \, x^{ls+r}}{(1-x^s)^{m+1}} + \frac{bx^{s+r}}{1-x^s} \qquad (51)$$

<u>Tabela</u> <u>koeficijenata</u> C^m_l

Nekoliko prvih koeficijenata (52) dano je u slijedećoj tabeli:

l	1	2	3	4	5	6	7	....
m								
1	1							
2	1	1						
3	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	302	302	57	1		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.

S obzirom na univerzalnost i jednostavnost formula (50) i (51), opravdano je tabeliranje koeficijenata C^m_l .Nedostatak ove metode (polinom (40) je preopširan za veliko m) za numerička izračunavanja,uz upotrebu kompjutera ,praktički ne dolazi do izražaja.

Primjena relacije (50) na redove sa m=1,2,3,4,5,6 daje, naravno, rezultate prikazane izrazima (27),(29),(31),(33),(35),(37) ali uz mnogo manje napora.

<u>Svojstva</u> <u>koeficijenata</u> C^m_l

1. Definicija

$$C^m_l = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l-k} \, k^m \binom{m+1}{l-k} \qquad m \in N \quad l=1,2....m \qquad (52)$$

2. Vrijedi $C_1^m = 1 \ , \ C_m^m = 1$

(Zadnja tvrdnja proizlazi iz svojstva 3.) Ovo znači da su prvi i zadnji koeficijent uvijek jednaki jedinici.

3. Simetrija

$$C_l^m = C_{m-l+1}^m \tag{53}$$

Ovo svojstvo izlazi zbog simetrije binomnih koeficijenata.

4. Rekurentna relacija

Tvrdimo da za koeficijente C_l^m vrijedi naredna rekurentna relacija:

$$C_{l+1}^{m+1} - (l+1)\cdot C_{l+1}^m - (m+1-l)\cdot C_l^m = 0 \tag{54}$$

Prilikom dokaza koristit ćemo slijedeće relacije:

$$\binom{r+1}{s} = \binom{r}{s} + \binom{r}{s-1} \tag{55}$$

$$r\cdot\binom{r}{s} = (s+1)\cdot\binom{r}{s+1} + s\cdot\binom{r}{s} \tag{56}$$

Izraz (55) je dobro poznata relacija za sumu binomnih koeficijenata , dok za (56) vidjeti na pr. **S. Fempl "Redovi"** str. 88 (izdanje Zavoda za izdavanje udžbenika NR Srbije, 1960. g.)

Dokaz

$$C_l^m = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \binom{m+1}{l-k}$$

Na temelju svojstva (55) možemo pisati:

$$\binom{m+1}{l-k} = \binom{m+2}{l-k} - \binom{m+1}{(l-1)-k}$$

Slijedi:

$$C_l^m = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] - \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ (l-1)-k \end{matrix}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] + \sum_{k=1}^{l} (-1)^{(l-1)-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ (l-1)-k \end{matrix}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] - \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{(l-1)-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ (l-1)-k \end{matrix}\right] - k^{m+1} \left[\begin{matrix} m+1 \\ -1 \end{matrix}\right]$$

Kako je zadnji član jednak nuli a druga suma jednaka C_{l-1}^m , onda pišemo:

$$C_l^m = C_{l-1}^m + \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\, k^m \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] \qquad (57)$$

Koristeći svojstvo (56) sada ćemo napisati:

$$(m+1)\cdot \left[\begin{matrix} m+1 \\ l-k \end{matrix}\right] = (l+1-k)\cdot \left[\begin{matrix} m+1 \\ (l+1)-k \end{matrix}\right] + (l-k)\cdot \left[\begin{matrix} m+1 \\ l-k \end{matrix}\right]$$

Prvi binomni koeficijent na desnoj strani prikazat ćemo , služeći se svojstvom (55), ovako:

$$\left[\begin{matrix} m+1 \\ (l+1)-k \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} m+2 \\ (l+1)-k \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} m+1 \\ l-k \end{matrix}\right]$$

što uvršteno u prethodni izraz daje nakon sređivanja i zamjene $l \rightarrow l-1$:

$$(m+1)\cdot \left[\begin{matrix} m+1 \\ l+1)-k \end{matrix}\right] = l\cdot \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] - k\cdot \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} m+1 \\ (l+1)-k \end{matrix}\right] \qquad (58)$$

tj.

$$l\cdot \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] = (m+2)\cdot \left[\begin{matrix} m+1 \\ (l+1)-k \end{matrix}\right] + k\cdot \left[\begin{matrix} m+2 \\ l-k \end{matrix}\right] \qquad (59)$$

Nakon množenja izraza (57) sa l, izvršimo zamjenu iz (59) u taj izraz:

$$l\cdot C_l^m = l\cdot C_{l-1}^m + (m+2)\sum_{k=1}^{l}(-1)^{l-k}k^m\begin{bmatrix} m+1 \\ (l-1)-k\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{l}(-1)^{l-k}k^{m+1}\begin{bmatrix} m+2 \\ l-k\end{bmatrix} =$$

$$= l\cdot C_{l-1}^m + (m+2)\sum_{k=1}^{l}(-1)^{(l-1)-k}k^m\begin{bmatrix} m+1 \\ (l-1)-k\end{bmatrix} + k^m\begin{bmatrix} m+1 \\ -1\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{l}(-1)^{l-k}k^{m+1}\begin{bmatrix} m+2 \\ l-k\end{bmatrix}$$

Kako je binomni koeficijent s negativnim donjim indeksom jednak nuli, a sume na desnoj strani su respektivno C_{l-1}^m i C_l^{m+1}, možemo pisati:

$$l\cdot C_l^m = l\cdot C_{l-1}^m - (m+2)\cdot C_{l-1}^m + C_l^{m+1}$$

odnosno,

$$C_l^{m+1} - l\cdot C_l^m - (m+2-l)\cdot C_{l-1}^m = 0 \qquad (60)$$

Ponovnom zamjenom $l \to l+1$ (da bi izbjegli negativni donji indeks za $l=0$) dobija se konačno:

$$C_{l+1}^{m+1} - (l+1)\cdot C_{l+1}^m - (m+1-l)\cdot C_l^m = 0$$

a to je relacija (54). Time je dokaz završen.

5. Tvrdimo da vrijedi: (za m = 1,2,....)

$$\sum_{l=1}^{m} C_l^m = m! \qquad (61)$$

Dokaz

Dokaz ćemo izvesti metodom totalne indukcije.
Iz tabele se neposredno vidi da ova tvrdnja vrijedi za m = 1,2,3, ...7. Pretpostavimo da ovo vrijedi za neki proizvoljni $m\neq 1$. Dokažemo li da (61) vrijedi i za m+1, znači da vrijedi za $\forall(m \in N)$.
Pišimo rekurentnu relaciju za koeficijente C_l^m u obliku (60):

$$C_l^{m+1} - l\cdot C_l^m - (m+2-l)\cdot C_{l-1}^m = 0$$

Sumirajmo ovaj izraz po l, od 1 do m:

$$\sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} - \sum_{l=1}^{m} l\cdot C_l^{m} - (m+2)\sum_{l=l}^{m} C_{l-1}^{m} + \sum_{l=1}^{m} l\cdot C_{l-1}^{m} = 0 \tag{62}$$

Transformirajmo ovu jednakost tako da pod znakom sumacije svi koeficijenti imaju isti donji indeks:

$$\sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} - \sum_{l=1}^{m} l\cdot C_l^{m} - (m+2)\sum_{l=l}^{m} C_{l-1}^{m} + \left\{ \sum_{l=1}^{m} (l-1)\cdot C_{l-1}^{m} + \sum_{l=1}^{m} \cdot C_{l-1}^{m} \right\} = 0$$

$$\sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} - \sum_{l=1}^{m} l\cdot C_l^{m} + \sum_{l=1}^{m} (l-1)\cdot C_{l-1}^{m} - (m+1)\sum_{l=l}^{m} C_{l-1}^{m} = \sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} - \sum_{l=1}^{m} l\cdot C_l^{m} +$$

$$+\sum_{l=0}^{m} l\cdot C_l^{m} - (m+1)\sum_{l=0}^{m} \cdot C_l^{m} = \sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} - \sum_{l=1}^{m} l\cdot C_l^{m} + \left\{ \sum_{l=0}^{m} l\cdot C_l^{m} - m\cdot C_m^{m} \right\} -$$

$$- \left\{ (m+1)\sum_{l=0}^{m} \cdot C_l^{m} - (m+1)\cdot C_m^{m} \right\} = 0$$

Vodeći računa da je $C_m^m = 1$ i da sumacija umjesto od jedan može početi od nule (zbog $C_0^m = 0$) , pišemo:

$$\sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} + 1 = (m+1)\sum_{l=1}^{m} \cdot C_l^{m} \tag{63}$$

Zbog induktivne pretpostavke vrijedi onda:

$$\sum_{l=1}^{m} C_l^{m+1} + 1 = (m+1)\cdot m! = (m+1)!$$

$$\sum_{l=1}^{m+1} \left[C_l^{m+1} - C_{m+1}^{m+1} \right] + 1 = (m+1)!$$

Kako je $C_{m+1}^{m+1} = 1$, to možemo pisati:

$$\sum_{l=1}^{m+1} C_l^m = (m+1)!$$

Time je dokaz završen !

(Za koeficijente dane u prethodnoj tabeli to se lako provjeri zbrajanjem po pojedinim redovima.)

6. svojstvo

Kao što je poznato iz teorije polinoma , njegovi koeficijenti se mogu izraziti pomoću derivacija tog polinoma za $x = 0$. Pokazali smo ranije da vrijedi:

$$C_l^m = \frac{P_m^{(l)}(0)}{l!} \qquad (64)$$

odnosno:

$$P_m^{(l)}(0) = l! \cdot C_l^m \qquad (65)$$

Kako smo koeficijente C_l^m definirali na drugi način,to nam izraz (65) omogućuje naći proizvoljnu ($l \leq m$) derivaciju polinoma (40) za vrijednost argumenta $x = 0$.

Neki specijalni redovi tipa (1)

Promatrat ćemo red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 10^{n} \tag{66}$$

i red oblika:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 10^{-n} \tag{67}$$

Prvi od njih je divergentan , dok je drugi konvergentan. Iako imamo opću metodu za određivanje parcijalnih suma, odnosno suma, takvih redova, ovdje ćemo izložiti jedan interesantan način primjenljiv na redove (66) i (67) pa i općenitije od njih, ako je x=10. Pritom ćemo slijediti jedan put induktivnog izlaganja, da bismo pokazali kako i jednostavne metode , katkad , mogu dovesti do vrijednih rezultata. Naravno, svi zaključci do kojih dođemo proizlaze iz ranijih generalnih razmatranja.

Red (66)

Umjesto reda (66) promatrajmo red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9n \cdot 10^{n} \tag{68}$$

čiju k-tu parcijalnu sumu ćemo označiti sa:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} 9n \cdot 10^{n} \tag{69}$$

K-ta parcijalna suma reda (66) povezana je tada sa (69) izrazom:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} n \cdot 10^{n} = \frac{s_k}{9} \tag{70}$$

Izračunajmo nekoliko prvih članova sume (69):

$$
\begin{array}{lll}
s_1 = (1\cdot 10^1)\cdot 9 & = & 90 \\
s_2 = (1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^2)\cdot 9 & = & 1890 \\
s_3 = (1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^3)\cdot 9 & = & 28890 \\
s_4 = & = & 388890 \\
s_5 = & = & 4888890 \\
s_6 = & = & 58888890 \\
s_7 = & = & 688888890 \\
s_8 = & = & 7888888890 \\
s_9 = & = & 88888888890 \\
s_{10} = (1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^2 + \qquad + 10\cdot 10^{10})\cdot 9 & = & 988888888890
\end{array}
$$

....

....

Na temelju vrijednosti nekoliko prvih parcijalnih suma reda (68) tvrdimo da za njegove parcijalne sume vrijedi općenito:

$$s_k = [k-1]\underbrace{888........}_{k-1 \text{ puta}}890 \qquad (71)$$

(Ovdje i u buduće, izraz u maloj uglatoj zagradi označava znamenku odgovarajućeg broja, osim ako je to jasno samo po sebi.)

Dokazat ćemo ovu tvrdnju totalnom indukcijom.

Dokaz

Vidi se da ova tvrdnja vrijedi za k=1. Pretpostavljajući da vrijedi za proizvoljni k , dokazat ćemo da vrijedi i za k+1 .
Za k+1 parcijalnu sumu važi:

$$s_{k+1} = s_k + 9(k+1)\cdot 10^{k+1} \qquad (72)$$

$$s_{k+1} = [k-1]\underbrace{888........}_{k-1 \text{ puta}}890 + 9(k+1)\cdot 10^{k+1}$$

$$s_{k+1} = (k-1)\cdot 10^{k+1} + \underbrace{888........}_{k-1 \text{ puta}}890 + 9(k+1)\cdot 10^{k+1} =$$

$$= 10k\cdot10^{k+1} + 8\cdot10^{k+1} + \underbrace{888.......890}_{k-1 \text{ puta}}$$

$$k\cdot10^{k+2} + 8\cdot10^{k+1} + \underbrace{888.......890}_{k-1 \text{ puta}}$$

$$\begin{array}{rr} & [k]\overbrace{0..........0}^{k+2 \text{ puta}} \\ & 80.........0 \\ + & \underline{8.......890} \\ s_{k+1} = & [k]\underbrace{88.......890}_{k \text{ puta}} \end{array}$$

$$s_{k+1} = [(k+1)-1]\underbrace{88.............890}_{(k+1)-1 \text{ puta}} \qquad (73)$$

Vidimo da $k+1$ parcijalna suma ima isti izgled kao (71). Time je dokaz gotov.

Došli smo, dakle, do slijedećeg rezultata:

1.)

Bez praktički ikakvog računanja, možemo jednostavno pomoću (71) odrediti bilo koju parcijalnu sumu reda (68). (Na primjer , 13-ta parcijalna suma glasi: s_{13} = 1288888888888890)

2.)

Na jednostavan način, pomoću (70) odredit ćemo k-tu parcijalnu sumu reda (*1*). (Na primjer $S_{13} = s_{13} / 9$ = 143209876543210)

<u>Red</u> (67)

Slično kao ranije, promatrat ćemo red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9n\cdot10^{-n} \qquad (74)$$

i njegovu k-tu parcijalnu sumu:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} 9n\cdot10^{-n} \qquad (75)$$

Pomoću ove sume možemo izraziti k-tu parcijalnu sumu reda (67):

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} n\cdot 10^{-n} = \frac{s_k}{9} \qquad (76)$$

Nekoliko prvih parcijalnih suma (75) glase:

$$\begin{aligned}
s_1 &= (1\cdot 10^{-1})\cdot 9 &&= 0.9\\
s_2 &= (1\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2})\cdot 9 &&= 1.08\\
s_3 &= (1\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3})\cdot 9 &&= 1.107\\
s_4 &= &&= 1.1106\\
s_5 &= &&= 1.11105\\
s_6 &= &&= 1.111104\\
s_7 &= &&= 1.1111103\\
s_8 &= &&= 1.11111102\\
s_9 &= &&= 1.111111101\\
s_{10} &= (1\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + \ldots\ldots + 10\cdot 10^{-10})\cdot 9 &&= 1.1111111100
\end{aligned}$$

....

....

Poopćenje slično prethodnom vodi na formulu:

$$s_k = \underbrace{1.11\ldots\ldots\ldots1}_{k-1 \text{ puta}} - k\cdot 10^{-k} \qquad (77)$$

koja se također dokazuje totalnom indukcijom (ne navodimo dokaz). Tako nam formula (77) određuje k-tu parcijalnu sumu reda (74),a formula (76) reda (67). No ,kako su ti redovi konvergentni,odredimo limes niza parcijalnih suma za $k \to \infty$.

Za red (75):

$$s_\infty = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left[\underbrace{1.11\ldots\ldots\ldots1}_{k-1 \text{ puta}} - k\cdot 10^{-k}\right] \qquad (78)$$

$$s_\infty = 1.111\ldots\ldots - \lim_{k\to\infty} k\cdot 10^{-k} \qquad (79)$$

Kako primjenom L'Hospital-ovog pravila dobivamo da je limes na deanoj strani jednak nula,izlazi:

$$s_{\infty} = 1.111\ldots\ldots = \frac{10}{9} \tag{80}$$

tj.

$$s_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 9n\cdot 10^{-n} = \frac{10}{9} \tag{81}$$

Za red (67):

$$S_{\infty} = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{s_k}{9} = \frac{s_{\infty}}{9} \tag{82}$$

$$S_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 10^{-n} = \frac{10}{81} \tag{83}$$

Ponovo napominjemo da se ovi rezultati za parcijalne sume mogu dobiti iz formule (17) , stavljajući u nju:

za red (68) $x=10, a=9, m=1, s=1, r=0, b=0$

za red (74) $x=10, a=9, m=1, s=-1, r=0, b=0$

Daljnji primjeri

1. primjer

Divergentan red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(10^{n} + 10^{-n}) \tag{84}$$

promatramo paralelno sa redom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9n(10^{n} + 10^{-n}) \tag{85}$$

Njihove k-te parcijalne sume su respektivno:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} n(10^n + 10^{-n}) \tag{86}$$

odnosno:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} 9n(10^n + 10^{-n}) \tag{87}$$

Parcijalnu sumu (87) možemo pisati:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} 9n\cdot 10^n + \sum_{n=1}^{k} 9n\cdot 10^{-n} =$$

$$= [k-1]\underbrace{888\ldots\ldots.}_{k-1\ \text{puta}}890 + (1.\underbrace{11\ldots\ldots\ldots 1}_{k-1\ \text{puta}} - k\cdot 10^{-k})$$

Konačno se dobija:

$$s_k = [k-1]\underbrace{888\ldots\ldots.}_{k-1\ \text{puta}}891.\underbrace{11\ldots\ldots\ldots 1}_{k-1\ \text{puta}} - k\cdot 10^{-k} \tag{88}$$

Sad se lako izračuna bilo koja parcijalna suma reda (84). Na primjer:

$$S_3 = \frac{s_3}{9} = \frac{28891.11-3\cdot 10^{-3}}{9} = 3210.123$$

2. primjer

Za divergentan red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(10^n - 10^{-n}) \tag{89}$$

se parcijalne sume računaju kao $S_k = \frac{s_k}{9}$,gdje je s_k jednako:

$$s_k = [k-1]\underbrace{888\ldots\ldots.8.}_{k+1\ \text{puta}}\underbrace{88\ldots\ldots\ldots}_{k-2\ \text{puta}}89 + k\cdot 10^{-k} \tag{90}$$

Suma prvih pet članova iznosi na primjer:

$$S_5 = \frac{4888888.8889 + 5\cdot 10^{-5}}{9} = 543209.87655$$

3. primjer

Konačnoj sumi:

$$\sum_{n=1}^{k} (k-n)10^n \qquad (91)$$

pripadna veličina s_k se može napisati kao:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} 9(k-n)10^n = \sum_{n=1}^{k} 9k\cdot 10^n - \sum_{n=1}^{k} 9n\cdot 10^n =$$

$$= 10k(10^k - 1) - [k-1]\underbrace{888.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}_{k-1 \text{ puta}}890$$

Može se jednostavno pokazati da izlazi:

$$s_k = \underbrace{11.\,.\,.\,.\,.\,.\,.1}_{k \text{ puta}}0 - 10k \qquad (92)$$

Suma (91) od 14 članova iznosi na primjer:

$$S_{14} = \frac{s_{14}}{9} = \frac{11111111111110 - 140}{9} = 12345679012330$$

4. primjer

Sve se to može još više uopćiti ali postaje i suviše komplicirano. K - ta parcijalna suma divergentnog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot 10^n \qquad (93)$$

može se izračunati (primjenom rekurentne relacije (9) ili jednostavnije) i pisati na slijedeći način:

$$S_k = \frac{(81k^2 - 18k + 11)\cdot 10^{k+1} - 110}{9^3} \qquad (94)$$

Definiramo li sada:

$$S_k = \frac{s_k}{9^2} \tag{95}$$

slijedi:

$$s_k = \frac{(81k^2-18k+11)\cdot 10^{k+1}-110}{9} = 9k^2\cdot 10^{k+1} - 2k\cdot 10^{k+1} + \frac{11}{9}\cdot 10^{k+1} + \frac{110}{9}$$

Kako je $\frac{11}{9} = 1.22\ldots$ i $\frac{110}{9} = 12.22\ldots$, tada pišemo:

$$\begin{array}{lr}
 & [9k^2]\overbrace{00\ldots\ldots\ldots0}^{k+1 \text{ puta}} \\
- & [2k\ ]00\ldots\ldots\ldots0 \\
\hline
 & [9k^2-2k]00\ldots\ldots\ldots0 \\
+ & 122\ldots\ldots\ldots2.22\ldots\ldots \\
\hline
 & [9k^2-2k+1]\underbrace{222222222222}_{k+1 \text{ puta}}.22\ldots\ldots \\
- & 12.22\ldots\ldots \\
\hline
 & [9k^2-2k+1]\underbrace{22\ldots\ldots\ldots}_{k-1 \text{ puta}}210
\end{array}$$

Prema tome:

$$s_k = [9k^2-2k+1]\underbrace{22\ldots\ldots\ldots}_{k-1 \text{ puta}}210 \tag{96}$$

Četvrta parcijalna suma reda (95) iznosi:

$$S_4 = \frac{13722210}{9^2} = 169410$$

5. primjer

Slično se za konvergentni red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot 10^{-n} \tag{97}$$

uz definiciju (95), dobija:

$$s_k = 12.\underbrace{22\ldots\ldots\ldots}_{k-2 \text{ puta}}21 - (9k^2+20k)\cdot 10^{-k} \tag{98}$$

Konkretno, imamo na primjer:

$$S_5 = \frac{3017}{20000} = 0.15085 \qquad \text{i} \qquad S_\infty = \frac{110}{729} = 0.1508916...$$

Jedna primjena

Neka je zadan neki broj (na primjer 143209876543210). Da li ga je moguće prikazati u obliku sume $S_k = 1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^2 + \ldots + k\cdot 10^k$? Prema (70) je:

$$S_k = \frac{s_k}{9} \quad (70) \qquad s_k = [k-1]\underbrace{888.........8}_{k-1 \text{ puta}}90 \quad (71)$$

Ako se naš broj može tako prikazati onda je on jednak S_k, pa za njega mora biti:

$$9\cdot S_k = s_k$$

tj. produkt tog broja sa 9 mora imati oblik (71).
Zaista,

$$9\cdot 143209876543210 = 1288888888888890$$

a to je zbilja broj oblika (71). Odgovor na naše pitanje je prema tome potvrdan. To nije slučaj sa brojem 24568032156780 , jer on pomnožen sa 9 daje 221132289411020.

Na kraju još jedno pitanje. Čemu sve to kraj opće metode određivanja parcijalnih suma i suma konvergentnih redova ? Osim odgovora da je, eto, moguć i ovakav pristup, mislimo da izložene formule (uz one koje nismo dotakli) mogu predstavljati dovoljno jednostavan algoritam za određivanje nekih konačnih i beskonačnih suma.

LITERATURA

[1] Fempl S. (1960) „Redovi (Sa prilozima D.S.Mitrinovića)“, Zavod za izdavanje udžbenika NRS, Beograd

CONSIDERATIONS ON ONE TYPE OF SERIES

In this work, created in the year 1982, are considered certainproperties of potential series and of so called Euler coefficients.Some simple algorithms for computing partial sums of some potential series are presented.