

UDC 523.212

## O NIZOVIMA PRATILACA U SUNČEVOM SISTEMU

Ladislav Babić

Astronomsko društvo „R. Bošković“

Ticius — Bodeov zakon (u daljnjem tekstu T—B zakon), koji povezuje srednje udaljenosti planeta od Sunca sa nizom prirodnih brojeva, upućuje nas da potražimo da li i za satelitske sisteme pojedinih planeta postoje odgovarajuće zakonitosti. Uobičajeni oblik T—B niza

$$r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-1} \quad n = -\infty, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (1)$$

daje nam približne srednje udaljenosti planeta izražene u A.J. Za opću analizu pogodniji je, oblik T—B niza u kojem se sve udaljenosti izražavaju relativno prema Merkuru. Ovo se može dobiti iz gornje relacije dijeljenjem obje strane jednakosti sa 0,4

$$r_n = 1 + 0,75 \cdot 2^{n-1} \quad n = -\infty, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (2)$$

Ova relacija sugerira nam da ispitamo da li se udaljenosti satelita od centralne planete mogu prikazati općim izrazom oblika:

$$r_n = 1 + A \cdot B^{n-1} \quad n = -\infty, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (3)$$

(ili u apsolutnim jedinicama  $R_n = R_\infty r_n$  gdje je sa  $R_\infty$  označena daljina satelita u odnosu na koju su izražene sve udaljenosti).

Ovdje su  $A = (r_1 - 1)$  i  $B$  bezdimenzionalne konstante. Napose, vrijednost veličine  $A$  ovisi o izboru referentne putanje.

Za analizu su uzeti slijedeći sistemi:

- 1) SUNČEV SISTEM (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, asteroidni pojas, Jupiter, Saturn, Uran) bez Neptuna i Plutona
- 2) JUPITEROV SISTEM (Amaltea, Io, Europa, Ganimed, Kalisto, VI, X, VII, XII, XI, VIII, IX)
- 3) SATURNOV SISTEM (Mimas, Enceladus, Thetis, Dione, Rhea, Titan, Hyperion, Japet, Phoebe)
- 4) URANOV SISTEM (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania, Oberon)

Iz pretpostavljene zavisnosti (3) logaritmiranjem se dobiva

$$\log(r_n - 1) = n \log B + \log(A \cdot B^{-1})$$

što znači da je  $\log(r_n - 1)$  linearna funkcija broja  $n$ .

Tada se metodom linearne regresije mogu odrediti  $\log B$  i  $\log(A \cdot B^{-1})$  (a time naravno  $A$  i  $B$ ), te vidjeti sa kolikom točnošću dobijeni nizovi aproksimiraju stvarne udaljenosti satelita od planete, odnosno planeta od Sunca.

Da bi se dobilo slaganje sa opaženim rastojanjima, napuštena je ideja da (kao kod T—B niza) svakom satelitu (orbiti) mora odgovarati po jedan različit prirodan broj, tako da grupe od dva ili više veoma bliskih satelita (orbite) mogu imati isti  $n$ . Na primjer, kod Jupiterovog sistema bliski sateliti VI, X, VII imaju  $n = 7$ , a XII, XI, VIII, IX  $n = 8$ , dok kod Saturna Titan i Hyperion imaju  $n = 6$ . Točnije rečeno, prirodan broj  $n$  pridjelili smo srednjoj udaljenosti grupe (srednjoj orbiti).

(Ustvari, već se i kod T—B niza nailazi na ovaj slučaj. Tako broju  $n = 4$  odgovara velika koncentracija objekata — asteroidni pojas. Ili, broju  $n = 5$  osim Jupitera pripadaju i planetoidi Trojanci u libracionim tačkama Jupitera.)

Osim toga, u nizovima postoje i praznine (mjesto na kojima nema satelita ili još nisu otkriveni), npr. kod Jupiterovog sistema za  $n = 5,6$  (između Kalista i grupe VI, X, VII), a kod Saturnovog sistema za  $n = 5$  (između Rheae i Titana),  $n = 7$  (između Hyperiona i Japeta) i  $n = 9$  (između Japeta i Phoebe).

(I ovaj slučaj poznat je iz historije T—B niza — za  $n = 4$  do otkrića asteroidnog pojasa nije bio poznat ni jedan objekat.)

Tabela I — SUNČEV SISTEM

PLANETA	n	udaljenost (A.J.)	udaljenost MERKUR=1	koef. korelacije = 0,99962		
				r <sub>n</sub>	greška (%)	greška (%) kod T-Bniza
MERKUR	-∞	0,39	1	1	—	2,6
VENERA	1	0,72	1,85	1,80	2,7	2,8
ZEMLJA	2	1,00	2,56	2,58	0,8	—
MARS	3	1,52	3,90	4,10	5,1	5,3
ASTEROIDI	4	2,80	7,18	7,12	0,8	0,0
JUPITER	5	5,20	13,33	13,05	2,1	0,0
SATURN	6	9,58	24,56	24,74	0,7	4,4
URAN	7	19,14	49,08	47,76	2,7	2,4
NEPTUN	8	30,20	77,44	93,12	20,2	28,5
PLUTON	9	39,44	101,13	182,48	80,4	95,7

Tabela II — JUPITEROV, SATURNOV I URANOV SISTEM

(Koficijenti korelacije iznose 0,99991; 0,99949 i 0,98896.)

SATELIT	n	daljina (1000 km)	relativna daljina	r <sub>n</sub>	greška (%)	
AMALTEA	-∞	180,5	1	1	—	
IO	1	421,6	2,34	2,37	1,3	
EUROPA	2	670,8	3,72	3,60	3,2	
GANIMED	3	1 070	5,93	5,95	0,3	
KALISTO	4	1 882	40,43	10,40	0,3	
	5	—	—	18,85	—	
	6	—	—	34,92	—	
VI	7	11 470	63,55	64,86	65,45	3
X		11 850	65,65			
VII		11 800	65,37			
XII	8	21 200	117,45	126,04	123,46	5,1
XI		22 600	125,21			
VIII		23 500	130,19			
IX		23 700	131,30			
MIMAS	-∞	185,4	1	1	—	
ENCELADUS	1	237,9	1,28	1,30	1,6	
THETIS	2	294,5	1,59	1,55	2,5	
DIONE	3	377,2	2,03	1,99	2	
RHEA	4	526,7	2,84	2,81	1,1	
	5	—	—	4,29	—	
TITAN	6	1 221	6,59	7,29	6,99	6,1
HYPERION		1 479,3	7,98			
	7	—	—	11,90	12,4	
JAPET	8	3 558,4	19,19	20,84	8,5	
	9	—	—	37,12	—	
PHOEBE	10	12 945,5	69,82	66,73	4,4	
MIRANDA	-∞	130,4	1	1	—	
ARIEL	1	191,9	1,47	1,51	2,7	
UMBRIEL	2	267,3	2,05	2,01	2	
TITANIA	3	439,2	3,37	3	11	
OSBERON	4	587,0	4,50	4,96	10,2	

Nakon izvršene analize dolazimo do slijedećih nizova:

$$1) \text{ SUNČEV SISTEM} \quad r_n = 1 + 0,8 \cdot 1,97^{n-1} \quad (4)$$

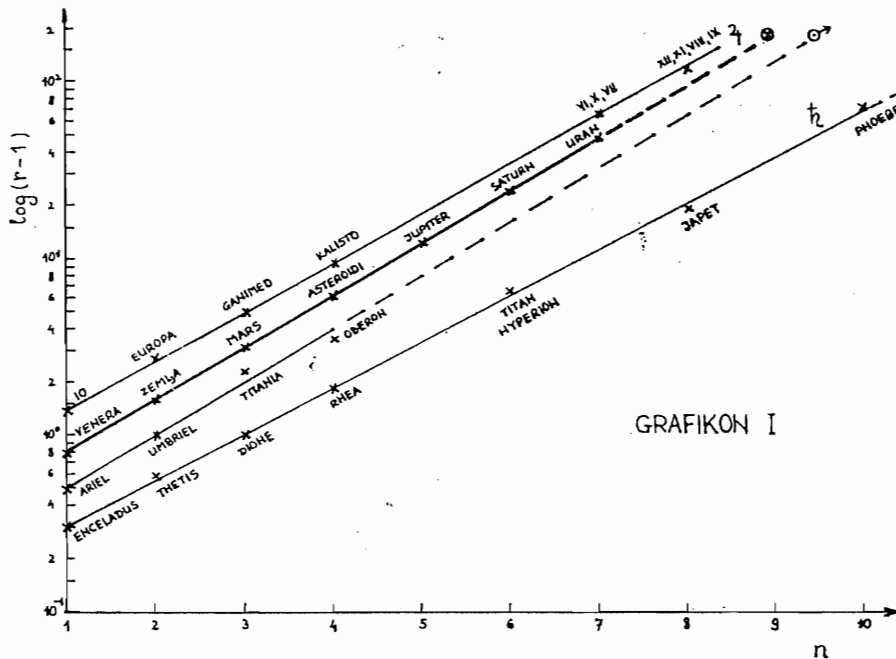
$$2) \text{ JUPITEROV SISTEM} \quad r_n = 1 + 1,37 \cdot 1,9^{n-1} \quad (5)$$

$$3) \text{ SATURNOV SISTEM} \quad r_n = 1 + 0,3 \cdot 1,82^{n-1} \quad (6)$$

$$4) \text{ URANOV SISTEM} \quad r_n = 1 + 0,51 \cdot 1,98^{n-1} \quad (7)$$

$$(n = -\infty, 1, 2, 3, 4 \dots)$$

Iz Tabele I i Tabele II vidi se kakvo je podudaranje stvarnih udaljenosti satelita (planeta) sa udaljenostima dobijenim pomoću ovih nizova. Formule (4), (5), (6), (7) prikazane su i grafički u linearno-logaritamskom mjerilu (Grafikon I). Prave udaljenosti satelita leže praktički na pripadnim regresionim pravcima.



Ako bi se T—B niz još i mogao smatrati slučajnom igrom brojeva, nailazak na isti tip zavisnosti kod raznih sistema svakako ukazuje na neku zakonomjernost, što se konačno vidi i iz vrijednosti koeficijenata korelacije.

Koeficijent korelacije govori nam kakva statistička veza postoji između dviju veličina. Po apsolutnoj vrijednosti on je manji od jedan i što je bliži jedinici kažemo da je stohastička veza između promatranih veličina čvršća. U slučaju da je jednak jedan veza između promatranih veličina je strogo zakonomjerna, dakle funkcionalna. Koeficijenti korelacije naših nizova dovoljno su veliki (pogledati tabele I i II) da bismo sa znatnom uvjerenošću tvrdili kako smo naišli na funkcionalnu ovisnost, tim prije što je iz statistike poznato da su koeficijenti korelacije mjerenih veličina, opterećenih pogreškama mjerenja (a to su u našem slučaju greške srednje daljine satelita od planeta), uvijek manji od koeficijenata korelacije „točnih veličina“. Ako postoji stohastička veza između rezultata mjerenja, to je ona čvršća za veličine na koje se ta mjerenja odnose.

Pogledamo li gravitacione potencijale ( $V \sim R^{-1}$ ) dolazimo do zaključka da se i ova fizikalna veličina, na položajima pojedinih satelita, može prikazati kao funkcija prirodnog broja  $n$ .

$$V_n = V - \infty / (1 + AB^{n-1}) \quad n = -\infty, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (8)$$

Dvije su, prema tome, osnovne relacije — za udaljenost (3) i za gravitacioni potencijal (8).

Služeći se pomovima Kvantne mehanike, mogli bismo reći kako su udaljenosti satelita od centralnog tijela i gravitacioni potencijali kvantizirani. Kako to, kad znamo da se u gravitacionom djelovanju (barem u dimenzijama o kojima mi govorimo) ne ispoljavaju kvantni efekti? Konačno, velika je raznolikost u srednjim udaljenostima (i ukupnim energijama) planeta, satelita, planetoida i kometa od centralnog tijela. Vidi se, na kraju krajeva, da se ni svi planeti i sateliti ne uklapaju u odgovarajuće nizove koji su za njih izvedeni. Kako onda objasniti formule (3) i (8)?

Pogledajmo koje su osnovne karakteristike sistema koje razmatramo. Sve su to sistemi koji se sastoje od jednog centralnog tijela i mnoštva trabanata. Radi se, dakle, o sistemu mnogo tijela. Mada gravitaciono djelovanje između dva tijela nije kvantizirano, prinudeni smo pretpostaviti da će sistem mnogo tijela, prepušten dovoljno dugo međusobnoj gravitacionoj interakciji, nastojati zauzeti stabilno stanje, odnosno stanje minimalne energije. Tom stanju odgovara samo ograničeni broj putanja dan T—B i ostalim odgovarajućim nizovima.

A što sa satelitima i planetama čije srednje udaljenosti se ne uklapaju u te nizove? Možemo smatrati da njihove putanje nisu stabilne, bilo da su poremećene uslijed nekog utjecaja ili su ta tijela tek relativno nedavno ušla u sastav centralnog tijela te im se putanje još nisu uspjele stabilizirati. Prema tome, Neptun i Pluton npr. imaju orbitu koja nije konačna — stabilna (možda zbog utjecaja transplutonske planete?). Ne treba zanemariti ni utjecaj negravitacionih efekata npr. efekt Poynting—Robertsona i drugi efekti nastali interakcijom svjetlosti i materije), koji, (ako vrlo mali, mogu na dugi rok znatno izmijeniti putanje sitnih tijela Sunčevog sistema (malih isatelita i asteroida, kometa, meteoroida...).

Prema tome, „kvantiziranost“ srednjih udaljenosti trabanata i gravitacionih potencijala nije inherentno svojstvo gravitacije, već proizlazi iz gravitacione interakcije sistema mnogo tijela. Formule (3) i (8), a napose bročane vrijednosti konstanti *A* i *B*, trebale bi se dobiti kao rezultat teorijskog razmatranja problema mnogo tijela (pomenuti nizovi sugeriraju da je *B* blizak broju 2).

**Pogledajmo поблиže dobijene nizove**

1) *Sunčev sistem*

Ovo je, ustvari, ekvivalent T—B niza (dobijen razmatranjem svih planeta osim Neptuna i Plutona), koji sa većom točnošću prikazuje srednje udaljenosti planeta.

2) *Jupiterov sistem*

Prvobitno su za analizu uzeta samo 4 Galilejeva satelita i Amaltea, jer razmatranje svih sputnika planete nije dovelo do uspjeha. Osnovni uzrok ležao je u tome što su se satelitima nastojali pripisati uzastopni prirodni brojevi i što nije izvršeno grupiranje veoma bliskih satelita, te se onda cijeloj grupi pridjelio isti broj (bolje rečeno srednjoj udaljenosti grupe). Medutim, analizom srednjih udaljenosti ovih pet pratilaca došlo se do formule vrlo bliske kasnije dobijenoj za sve satelite, za koju se pokazalo da veoma dobro prikazuje daljine i ostalih pratilaca, ako se prihvati da mogu postojati i praznine u nizu, odnosno vrlo bliski sateliti imati isti *n*.

Kod porodice Jupiterovih satelita lako su uočljive dvije grupe: bliski i daleki sateliti između kojih postoji izrazita praznina, kojoj u našem nizu svejedno odgovaraju brojevi *n* = 5 i *n* = 6. Otkriće novih satelita Jupitera moglo bi se očekivati na daljinama od oko 3,5 · 10<sup>6</sup> km (*n* = 5) i 6,5 · 10<sup>6</sup> km (*n* = 6).

Za *n* = 7, i *n* = 8 imamo vidnu koncentraciju dalekih Jupiterovih satelita (Tabela II i Grafikon I), dok za *n* = 9 dobivamo daljinu koja je na granici sfere djelovanja Jupitera, i ovdje ne bi trebalo biti satelita ili će oni imati jako nestabilnu putanju.

Možemo smatrati da su bliski pratioci Jupitera genetski povezani sa njim, dok daleka grupa predstavlja, ustvari, zarobljene asteroide (u prilog tome govore njihove dimenzije i mase).

3) *Saturnov sistem*

Relativno velika pogreška u opisivanju daljine Hyperiona mogla bi se objasniti gravitacionim djelovanjem masivnog i bliskog Titana.

Eventualni novi sateliti nalazili bi se na daljinama od oko 8 · 10<sup>6</sup> km (*n* = 5), 2,2 · 10<sup>6</sup> km (*n* = 7) i 6,9 · 10<sup>6</sup> km (*n* = 9). Za *n* = 11 (≈ 22,4 · 10<sup>6</sup> (km)) možda bi se i mogao naći satelit,

znamo li da je sfera djelovanja Saturna, zbog njegove veće daljine od Sunca, prostranija nego kod Jupitera, a kod potonjeg nailazimo na pratioce otprilike na ovoj udaljenosti.

Orbita sa  $n = 12$  suviše je bliza granici sfere djelovanja da bismo ovdje očekivali stabil-niji satelit.

#### 4) Uranov sistem

Koeficijent korelacije je za ovaj sistem najmanji, što dakako utječe i na pogreške aproksi-macije. Nepoznati satelit mogao bi se nalaziti na  $1,15 \cdot 10^6$  km ( $n = 5$ ) od planete, međutim malo je vjerovatan zbog velike daljine Urana od asteroidnog pojasa, ali se mogao desiti zahvat komete, naročito iz Uranove porodice komete.

#### Završne primjedbe

I) Relacija (3) ne omogućava nam da odredimo položaj orbita koje su bliže centralnom tijelu od referentne orbite  $r_{\infty} = 1$ .

Prema tome, objekti bliže Suncu od Merkura, Jupiteru bliži od Amaltee, Saturnu od Mi-masa i Uranu od Mirande nisu obuhvaćeni našim nizovima. To naravno ne ide u prilog univer-zalnosti navedene relacije, jer zašto npr. ne bi postojale stabilne orbite unutar one koju smo *pro-izvoljno* odabrali kao ishodišnu? Znamo, na kraju krajeva, da je Jupiterov XIV mjesec bliže ovom od Amaltee, a automatske sonde Voyager I i II otkrile su čitav niz Saturnovih satelita unutar Mirandine putanje (i Janus je unutar nje).

Teorija mnogo tijela vjerojatno bi na prirodan način dala udaljenost koju moramo smatrati referentnom (nazovimo je fundamentalnom daljinom) i koja se uopće ne mora podudarati sa našim referentnim daljinama. Npr., ako bi se fundamentalna daljina nalazila na samoj Roche-ovoj granici  $R_r = 2,46 R_{pl} (\rho_{pl}/\rho_s)^{1/3}$  onda ionako zbog plimskih sila središnjeg tijela ne bi mogle postojati orbite unutar referentne, pa bi time naš problem otpao. Međutim, koju Roche-ovu granicu uzeti? Naime, ova veličina osim o gustoći centra privlačenja ( $\rho_{PL}$ ), ovisi i o gustoći satelita ( $\rho_s$ ), te je za svaki satelit drugačija. Pretpostavimo da smo stavili  $\rho_s = \rho_{PL}$ . Kako se u tom slučaju odnose dimenzije naših ishodišnih orbita prema Roche-ovoj granici?

Tabela III

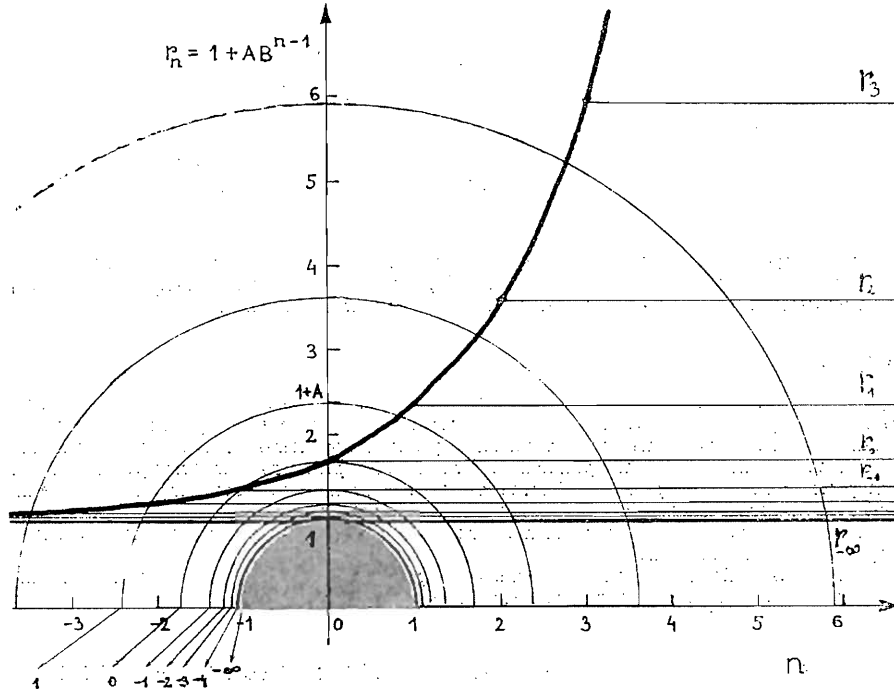
SISTEM	$R_r$	$R_r$ (km)	$R_{\infty}$
	( $\rho_s = \rho_{PL}$ )		
JUPITER	$2,46 R_{pl}$	174 290	$2,55 R_{pl}$
SATURN	$2,46 R_{pl}$	147 600	$2,65 R_{pl}$
URAN	$2,46 R_{pl}$	60 270	$2 \times 2,66 R_{pl}$

Iz Tabele III vidljivo je da se položaji referentnih orbita u Jupiterovom i Saturnovom sistemu zaista nalaze blizu Roche-ove granice, a kod Urana je Miranda oko dva puta dalje. Izvršimo li analizu za Uranov sistem, uzevši kao početnu, orbitu fiktivnog satelita koji se nalazi na samoj Roche-ovoj granici (za  $\delta_s = \delta_{PL}$ ), povećava se koeficijent korelacije (na 0,99606), a i kod Jupiterovog sistema imamo poboljšanje, odabere li se umjesto Amalteeine putanje zamišljena putanja na daljini od  $2,46 R_{pl}$  ( $\rho = 0,99992$ ), što kod Saturna nije slučaj.

Međutim, da bi formula dobro opisivala stvarnu situaciju, mora se uzeti početna orbita manjeg polumjera od  $2,46 R$ , jer i kod Jupitera i Saturna unutar ove granice postoje sateliti. Bitno pitanje je, prema tome, kolika je ova udaljenost. U svakom slučaju, vjerojatno je fundamen-talna daljina na neki način povezana sa Roche-ovom granicom.

II) Nelagodu može izazvati činjenica da prvi član niza (3) dobivamo za  $n = -\infty$  (toč-nije za  $n \rightarrow -\infty$ ), a iduće članove tek za  $n = 1, 2, 3, 4 \dots$

Ne sugerira li nam to, možda, da za  $n$  moramo uzeti i  $0, -1, -2, -3 \dots$ ? S obzirom da se radi o empirijskim formulama, zasad nemamo ni jedan teorijski razlog protiv. U prilog ove pretpostavke mogao bi, međutim, govoriti opažacki materijal. Kod Jupitera npr. za  $n = -2$  dobiva se  $r^{-2} = 1,20$ , što se dobro podudara sa položajem XV satelita ( $r = 1,23$ ). Zasad je to sve, ili gotovo sve.



Pogledajmo, naime, kakve još posljedice izaziva mogućnost da  $n$  poprima i negativne cijele vrijednosti. Izlazi da između  $r_1 = (1 + A)$  i  $r_{-\infty} = 1$  postoji još beskonačno mnogo stabilnih orbita, koje su to bliže jedna drugoj što je  $n$  manji (ovo se zorno vidi na Grafikonu II, gdje je prikazana funkcija  $r_n$  za sve cjelobrojne vrijednosti argumenta  $n$ ). Prema tome, stabilne orbite gomilaju se oko  $n = -\infty$ , tj. oko fundamentalne daljine. Ne govori li ovo gomilanje stabilnih orbita oko fundamentalne orbite da planete imaju tendenciju ka stvaranju prstenova (jer od čega li su oni građeni, ako ne od ogromnog broja satelita — gromada kamenja i leda — koji kruže po međusobno bliskim putanjama)? I pritom nije nužno pretpostaviti nikakav katastrofalan proces (raspad satelita pod djelovanjem plimskih sila), već bi prstenovi bili prirodna posljedica gomilanja mnoštva objekata na međusobno bliskim stabilnim putanjama, a sve bi ovo proizlazilo iz teorije mnogo tijela.

I ovdje se pokazuje kao osnovno da se na bilo koji način odredi veličina fundamentalne daljine koja bi se, kad bi se radilo samo o gravitacionom djelovanju, morala prema našoj hipotezi podudarati sa unutarnjom granicom prstenova. Sve ovo odnosilo bi se na krupnija tijela koja su podvrgnuta samo gravitacionoj interakciji. Negravitacioni efekti poput ranije navedenih, kao i djelovanje magnetosfere planete i električnih polja (naročito na sitne nabijene čestice), vjerojatno imaju veliku, ako ne i najvažniju, ulogu u formiranju fine strukture prstenova i izazivaju odstupanja od gore rečenog.

Najnovija otkrića pokazuju nam da, osim Saturna, prstenove imaju Jupiter i Uran.

Smije li se iz toga zaključiti da je postojanje planetarnih prstenova prije pravilo no izuzetak? I nije li dezintegracija satelita ipak premalo vjerojatan događaj da objasni nastanak najmanje tri prstena (ima li ih i Neptun?) u istom planetarnom sistemu?

Ali kako onda Merkur, Venera, Zemlja, Mars i vjerojatno Pluton nemaju prstenove? Prvo, oni imaju premalu masu da bi postali središta okupljanja mnoštva objekata. Drugo, koncentracija „malih“ tijela u okolini velikih planeta je mnogo veća nego li kod planeta zemljine grupe-

Tabcla IV

PLANET	RADIJUS PRSTENA	
	km	u radijusima planeta
JUPITER	128 000	1,81
SATURN	72 600 < $R$ < 168 000	1,21 < $R$ < 2,80
URAN	44 500	1,82

(asteroidni pojas je u „susjedstvu” Jupitera osim toga poznato je da se afeli mnogih kometa gomilaju oko velikih planeta — kometi porodica Jupitera, Saturna, Urana i Neptuna), a upravo ona predstavljaju građevinski materijal od kojeg se formiraju prstenovi.

#### Zaključak

Bez obzira na moguće interpretacije, nizovi koji opisuju udaljenosti trabanata od centra gravitacionog privlačenja nesumnjivo postoje i predstavljaju odraz neke općenite zakonitosti u vladanju sistema mnogo tijela podvrgnutih samo gravitacionoj interakciji. Ne jedanput bili smo svjedoci da su empirijski zakoni poslužili za formuliranje općih fizikalnih principa, iz kojih su onda proizašli kao nužna posljedica (možda najpoznatiji primjeri su odnos empirijski dobijenih Keplerovih zakona i zakona gravitacije, kao i zakoni spektralnih serija vodika). Nisu li opisani nizovi ključ za drugačiji pristup problemu mnogo tijela, kojeg se rješenje, kao što je poznato, u općem obliku ne može naći?

Bilo kako bilo, kosmogonijske teorije koje opisuju postanak Sunčevog sistema i sistema planetarnih pratilaca moraju dati objašnjenje navedenih nizova.  
Primljeno aprila 1983.

#### ON THE ORDERING OF SECONDARY BODIES IN THE SOLAR SYSTEM

This paper discusses laws of ordering of planets, planetary satellites and rings, and propose possible modifications of the Titius-Bode law.

The planetary rings occur as stable states for negative values of the exponent in Titius-Bode's law.